

APPLICATIONS HARMONIQUES DE SURFACES RIEMANNIENNES

LUC LEMAIRE

1. Introduction

Soient M, g et M', g' des variétés riemanniennes connexes, de classe C^∞ , de dimensions n et n' , éventuellement à bord (les bords étant alors notés ∂M et $\partial M'$). Nous supposons toujours ces variétés compactes. Nous définissons les applications harmoniques de M dans M' en suivant [10]:

(1.1) Définition. L'énergie d'une application $f \in C^\infty(M, M')$ est définie par

$$E(f) = \int_M e(f) v_g,$$

où $e(f) = \frac{1}{2} |df|^2$ est la densité d'énergie de f en un point.

Dans des systèmes de coordonnées locales $\{x^i\}$ et $\{u^\alpha\}$ sur M et M' , $e(f) = \frac{1}{2} g^{ij} f_i^\alpha f_j^\beta g'_{\alpha\beta}$ où $f_i^\alpha = \partial f^\alpha / \partial x^i$.

(1.2) Définition. Une application $f \in C^\infty(M, M')$ est harmonique ssi elle est point critique de la fonction E .

Dans des systèmes de coordonnées locales, notons

$$f_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k f_k^\alpha$$

la dérivée covariante seconde de f , et $\Delta f^\alpha = g^{ij} f_{ij}^\alpha$ le laplacien de f^α .

(1.3) Proposition [10]. Une application f est harmonique ssi elle vérifie les équations d'Euler Lagrange

$$\tau(f)^\alpha = \Delta f^\alpha + g^{ij} \Gamma_{ij}^\alpha{}_\beta (f) f_i^\beta f_j^\gamma = 0.$$

$\tau(f)$ est appelée la tension de f .

Une question classique du calcul global des variations est la suivante: toute classe d'homotopie d'applications de M dans M' contient-elle un représentant harmonique?

Pour les variétés sans bord, cette question s'est posée quand J. Eells et J.

Communicated by J. Eells, Jr., December 27, 1975. Aspirant au Fonds National Belge de la Recherche Scientifique. Université Libre de Bruxelles—University of Warwick.

$$(3.4) \quad \begin{aligned} V &= \int_M [\mathcal{P}(\lambda_x - \mu_y) + \mathcal{Q}(\lambda_y + \mu_x)] dx dy, \\ \mathcal{P} &= g'_{\alpha\beta} f_x^\alpha f_x^\beta - g'_{\alpha\beta} f_y^\alpha f_y^\beta, \quad \mathcal{Q} = 2g'_{\alpha\beta} f_x^\alpha f_y^\beta. \end{aligned}$$

Pour montrer que f est conforme, il suffit de montrer que $\mathcal{P} = \mathcal{Q} = 0$.

Comme f est point critique de l'énergie pour un problème de Dirichlet, nous savons que $V = 0$ pour toute variation fixant le bord (c'est-à-dire telle que λ et μ soient nulles sur ∂M), mais cela ne suffit pas pour démontrer que \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont nuls. Nous sommes donc amenés à considérer des variations $\rho_{(\varepsilon)}$ ne fixant pas le bord, et nous montrons que V est également nulle pour une telle variation.

Soit $\eta > 0$. Si ε est suffisamment petit, $\rho_{(\varepsilon)}$ est une bijection, le bord de $\rho_{(\varepsilon)}(M)$ est situé dans la couronne délimitée par les cercles de rayon $1 - \eta$ et $1 + \eta$ et sa longueur est comprise entre $2\pi(1 - \eta)$ et $2\pi(1 + \eta)$. Notons $z = x + iy$ la variable complexe sur M . Soit $\Phi_{(\varepsilon)}$ l'homéomorphisme conforme de M sur $\rho_{(\varepsilon)}(M)$ vérifiant $\Phi_{(\varepsilon)}(0) = 0$ et $\Phi_{(\varepsilon),z}(0) > 0$. $\Phi_{(\varepsilon)}$ existe par le théorème de représentation de Riemann. Par un théorème de Bieberbach et Landau [3, p. 136], $\Phi_{(\varepsilon)}$ vérifie sur M l'inégalité

$$|\Phi_{(\varepsilon)}(z) - z| < 4\pi\sqrt{2\eta}.$$

Lorsque ε tend vers 0, $\Phi_{(\varepsilon)}$ converge donc uniformément vers l'identité. Les $\Phi_{(\varepsilon)}$ étant holomorphes, cette convergence est C^∞ . La famille d'applications $\Phi_{(\varepsilon)}^{-1} \circ \rho_{(\varepsilon)}$ définit donc une variation C^∞ .

Cette variation fixe globalement le bord de M et préserve le problème de Dirichlet défini par $f(\partial M) = Q$. La variation première de E le long de $\Phi_{(\varepsilon)}^{-1} \circ \rho_{(\varepsilon)}$ est donc nulle en $\varepsilon = 0$. Comme l'énergie est préservée par la transformation conforme $\Phi_{(\varepsilon)}$, il en découle que $V = 0$ pour la variation $\rho_{(\varepsilon)}$.

Par le lemme fondamental du calcul des variations, pour montrer que $\mathcal{P} = 0$, il suffit de montrer que pour tout $H \in C^\infty(M)$,

$$\int_M \mathcal{P} \cdot H dx dy = 0.$$

Par la forme de V donnée en (3.4) et la relation $V = 0$, il suffit d'établir que pour tout H , le système

$$(3.5) \quad \lambda_x - \mu_y = H,$$

$$(3.6) \quad \lambda_y + \mu_x = 0$$

admet une solution sur M . Pour cela, considérons la forme

$$F = \lambda dx - \mu dy.$$

En vertu de (3.6),

$$dF = -\lambda_y dx \wedge dy - \mu_x dx \wedge dy = 0 .$$

Par le lemme de Poincaré, la forme F est exacte, et

$$F = dw .$$

Donc $\lambda = w_x$, $\mu = -w_y$ et par (3.5),

$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy} = \lambda_x - \mu_y = H .$$

Cette dernière équation admet une solution par exemple pour des données de Dirichlet nulles (cf. par ex. [7, p. 365]). Le couple w_x et $-w_y$ fournit la solution cherchée au système (3.5) (3.6).

On démontre de même que $\mathcal{Q} = 0$.

Remarque. Pour démontrer que f est conforme, nous avons utilisé le fait que M est simplement connexe et la forme particulière du problème de Dirichlet. Des exemples montrent que ces hypothèses ne peuvent être supprimées. Pour la première, cela découle de l'exemple (5.1) et pour la seconde, de la considération d'une application affine d'un disque dans une ellipse.

(b) f admet en tout point du bord un zéro d'ordre infini. Nous entendons par là qu'en un point du bord, toutes les dérivées de f s'annulent. On peut par ailleurs choisir une carte locale sur M' telle que f soit également nulle en ce point.

Considérons sur le disque (moins son centre) des coordonnées polaires (r, θ) , $r \in (0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Soit P un point de ∂M . En ce point, les données de Dirichlet impliquent

$$(3.7) \quad \frac{\partial^t f^\alpha}{\partial \theta^t}(P) = 0 \quad \forall t .$$

Comme f est conforme,

$$(3.8) \quad g'_{\alpha\beta}(f) \frac{\partial f^\alpha}{\partial r} \frac{\partial f^\beta}{\partial r} g^{11} = g'_{\alpha\beta}(f) \frac{\partial f^\alpha}{\partial \theta} \frac{\partial f^\beta}{\partial \theta} g^{22} .$$

(3.7) et (3.8) impliquent que

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial r}(P) = 0 .$$

Nous procédons dès lors par induction. Supposons que $\forall b \leq t$, $\forall a = 0, \dots, b$,

$$\frac{\partial^b f^\alpha}{\partial r^{b-a} \partial \theta^a}(P) = 0 .$$

Nous montrons que $\forall s \leq t + 1$,

$$\frac{\partial^{t+1} f^\alpha}{\partial r^{t-s+1} \partial \theta^s}(P) = 0 .$$

Pour cela, dérivons (3.8) $2t$ fois par rapport à θ et plaçons nous au point P . Toutes les dérivées d'ordre inférieur s'annulent par l'hypothèse d'induction, et

$$g'_{\alpha\beta} \frac{\partial^{t+1} f^\alpha}{\partial \theta^t \partial r} \frac{\partial^{t+1} f^\beta}{\partial \theta^t \partial r}(P) = g'_{\alpha\beta} \frac{\partial^{t+1} f^\alpha}{\partial \theta^{t+1}} \frac{\partial^{t+1} f^\beta}{\partial \theta^{t+1}}(P) = 0 .$$

Donc $(\partial^{t+1} f^\alpha / \partial \theta^t \partial r)(P) = 0$.

On dérive alors (3.8) successivement par rapport à

$$\begin{aligned} & \partial \theta^{2(t-1)} \partial r^2 , \\ & \dots \\ & \partial r^{2t} . \end{aligned}$$

En utilisant chaque fois les hypothèses d'induction et les résultats de la dérivation précédente, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{t+1} f^\alpha}{\partial \theta^{t-1} \partial r^2}(P) = 0 , \\ & \dots \\ & \frac{\partial^{t+1} f^\alpha}{\partial r^{t+1}}(P) = 0 , \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du point b .

(c) f est constante. Considérons un disque D de rayon $R > 1$ concentrique à M . Soit \mathcal{F}_Q l'application de D dans M' définie par

$$\mathcal{F}_{Q|M} = f , \quad \mathcal{F}_{Q|D \setminus M} \equiv Q .$$

Cette application est harmonique et C^∞ puisque toutes les dérivées de f valent zéro en tout point de ∂M . Comme elle a des zéros d'ordre infini en tout point tel que $r \in [1, R)$, elle est constante par un résultat de J. Sampson [24], [1]. f est donc constante, ce qui démontre le théorème (3.2).

La proposition suivante montre qu'une famille d'applications harmoniques ne dépend pas nécessairement continûment de ses données de Dirichlet, et que le problème d'existence peut être transformé complètement par une modification continue des données au bord.

(3.9) Proposition. Soient M un disque de rayon π et M' une sphère. Munissons M et M' de coordonnées polaires (r, θ) et (R, Θ) . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application harmonique $f_\varepsilon : M \rightarrow M'$ telle que $f(\pi, \theta) = (\pi - \varepsilon, \theta)$ et dont l'image couvre $\{(R, \Theta) \mid R \leq \pi - \varepsilon\}$.

Dans le cas où ε vaut 0, le théorème (3.2) montre qu'une application harmonique telle que $f(\pi, \theta) = (\pi, \theta)$ ne couvre pas M' .

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe une application conforme vérifiant ces conditions. Les métriques sur M et M' s'écrivent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 R \end{pmatrix}.$$

Une application de la forme $(r, \theta) \rightarrow (R(r), \theta)$ est donc conforme ssi elle vérifie

$$\frac{dR}{dr} = \frac{\sin R}{r}.$$

En intégrant cette équation, il vient

$$\int_r^\pi \frac{dr}{r} = \int_R^{\pi-\varepsilon} \frac{dR}{\sin R},$$

d'où

$$R = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(ar), \quad \text{où } a = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi - \varepsilon}{2}.$$

L'application $f_\varepsilon: (r, \theta) \rightarrow (R(r), \theta)$, définie par cette fonction remplit les conditions de l'énoncé.

4. Problème de Neumann

(4.1) Théorème. Soit M une surface compacte contractile à bord. Notons $\partial_\nu f$ la dérivée normale de $f: M \rightarrow M'$ le long de ∂M . Toute application f solution du problème de Neumann:

$$\begin{aligned} \tau(f) &= 0 && \text{sur } M, \\ \partial_\nu f &= 0 && \text{sur } \partial M \end{aligned}$$

est constante.

Démonstration. Comme pour le théorème (3.2), nous montrons qu'une solution de ce problème est conforme et qu'elle a un zéro d'ordre infini en un point.

Soit f une solution. Supposons que par une transformation conforme, M est représentée par une demi-sphère, munie de coordonnées polaires (r, θ) , $r \in [0, \frac{1}{2}\pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Le bord ∂M est la courbe $r = \frac{1}{2}\pi$.

Soit N la sphère entière, et \mathcal{F} l'application de N dans M' définie par

$$\mathcal{F}|_M = f, \quad \mathcal{F}(r, \theta) = f(\pi - r, \theta) \quad \text{sur } N \setminus M.$$

L'application \mathcal{F} est harmonique et C^∞ sauf peut-être le long de la ligne $r = \frac{1}{2}\pi$. Le long de cette ligne, la forme de \mathcal{F} et la relation $\partial \mathcal{F} / \partial r = \partial_\nu f = 0$ im-

pliquent que \mathcal{F} est de classe C^2 . Par la proposition dans [10, p. 117], \mathcal{F} est de classe C^∞ .

Par le théorème (2.8), \mathcal{F} est conforme.

Le long de $r = \frac{1}{2}\pi$, la conformité de \mathcal{F} et la relation $\partial\mathcal{F}/\partial r = 0$ impliquent que $\partial\mathcal{F}/\partial\theta = 0$. $\mathcal{F}|_{\partial M}$ est donc constante, et f est solution du problème de Dirichlet du théorème (3.2). La démonstration s'achève donc comme celle de ce théorème.

5. Surfaces non simplement connexes

Les théorèmes (3.2) et (4.1) sont basés sur l'unicité de la structure complexe sur un disque ou une sphère. Nous vérifions par un exemple qu'ils ne s'étendent pas au cas des surfaces non simplement connexes.

(5.1) Exemple. Soient $M = [-a, a] \times S^1$ un cylindre et $M' = S^2$ une sphère, avec leur métrique standart. Il existe des applications harmoniques solutions non constantes du problème de Dirichlet $f|_{\partial M} = Q$ ou du problème de Neumann $\partial_\nu f|_{\partial M} = 0$.

Démonstration. Considérons sur M des coordonnées euclidiennes $x \in [-a, a]$ et $y \in [0, 2\pi)$ et sur M' des coordonnées polaires (r, θ) . Une application de M dans M' de la forme $f(x, y) = (F(x), y)$ est harmonique ssi la fonction $H = 2F$ vérifie l'équation d'un pendule simple [25]

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - \sin H = 0.$$

Pour toute valeur de a , une valeur de l'énergie du pendule lui confère un mouvement révolutif de période a . Ceci correspond à une solution non constante du problème de Dirichlet $f|_{\partial M} = (0, \theta)$.

Pour $a > \frac{1}{2}\pi$, une valeur de l'énergie confère au pendule un mouvement oscillant de période $4a$, qui correspond à une solution du problème de Neumann. (Si $a \leq \frac{1}{2}\pi$, les seules solutions du problème de Neumann de la forme prescrite envoient le cylindre sur l'équateur ou sur un pôle.)

APPLICATIONS HARMONIQUES DE SURFACES SANS BORD

Dans tout ce qui suit, M et M' sont des surfaces compactes, orientables, sans bord. Leurs genres sont notés p et p' .

6. Suites minimisantes

Nous allons établir des théorèmes d'existence pour des applications harmoniques entre surfaces, en utilisant une méthode directe du calcul des variations. Pour cela, nous construisons une suite minimisante pour l'énergie dans

une classe d'homotopie donnée. Nous souhaitons établir que cette suite contient une sous-suite convergente, que la limite de cette sous-suite est de classe C^∞ et est dans la même classe d'homotopie que les éléments de la suite.

Rappelons la définition de l'espace de Sobolev $L_1^2(M, M')$ [22].

(6.1) Définition. Une application $f: M \rightarrow R^N$ appartient à $L_1^2(M, R^N)$ ssi $|f|$ et $|df|$ sont de carré sommable.

La norme L_1^2 de f est définie par

$$\|f\|_{L_1^2}^2 = \int_M (|f|^2 + |df|^2) v_g .$$

Pour définir l'espace $L_1^2(M, M')$, on considère un plongement riemannien de M' dans R^N (un tel plongement existe si N est suffisamment grand [23]).

(6.2) Définition. $f: M \rightarrow M'$ appartient à $L_1^2(M, M')$ ssi sa composée avec le plongement de M' dans R^N est dans $L_1^2(M, R^N)$.

Comme d'habitude, nous entendons par application de classe L_1^2 une classe d'applications à distances L_1^2 nulles les unes des autres, et nous disons que f est (par exemple) continue si un élément de cette classe est continu.

L'espace $L_1^2(M, M')$ apparaît naturellement dans l'étude des applications harmoniques entre variétés compactes. En effet, l'énergie (1.1), contrôle la norme L_1^2 de l'application.

(6.3) Proposition. *Toute suite minimisante pour E contient une sous-suite (f_r) convergeant faiblement vers une application f de L_1^2 . L'énergie de la limite vérifie*

$$E(f) \leq \liminf E(f_r) .$$

Démonstration. Une suite minimisante pour E est un ensemble borné de L_1^2 . Par [8; (12, 15, 10)] un tel ensemble contient une sous-suite convergeant faiblement.

D'après [8; (12, 15, 8)], une norme hilbertienne est semi-continue inférieurement pour la convergence faible. L'inégalité $E(f) \leq \liminf E(f_r)$ s'obtient donc en considérant E comme une norme équivalente à la norme L^2 sur l'ensemble des dérivées de fonctions de L_1^2 .

Lorsque la dimension de M vaut 1, le théorème de plongement de Sobolev implique que cette convergence est uniforme, et la limite de la suite, continue, ce qui permet d'établir l'existence d'une géodésique dans toute classe d'homotopie de courbes fermées.

En dimension 2, il n'en est pas de même: le théorème de Sobolev ne s'applique plus et la convergence établie en (6.3) n'est pas nécessairement uniforme, comme le montre l'exemple suivant le théorème (3.2). De plus, une application de classe L_1^2 n'est pas nécessairement continue.

Néanmoins, si f minimise l'énergie sur tout sous domaine de M , un résultat de C. Morrey montre que f est de classe C^∞ . Ce résultat s'appuie sur la pro-

position suivante, qui limite les discontinuités que peut présenter une application de classe L_1^2 en dimension 2.

(6.4) Définition. Une application d'un segment dans M' est absolument continue ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ tel que

$$\sum_{\sigma} |f(x'_\sigma) - f(x'_\sigma)| \leq \varepsilon,$$

lorsque les intervalles (x'_σ, x'_σ) sont disjoints et $\sum_{\sigma} (x''_\sigma - x'_\sigma) \leq \delta$.

La notation $|\ - |$ désigne ici la distance riemannienne sur M' .

(6.5) Proposition [21]. Si f est absolument continue, sa dérivée existe presque partout et la longueur de la courbe $f(x)$ est égale à l'intégrale de la norme de f_x .

(6.6) Proposition. Soient $f \in L_1^2(M, M')$ et U une carte locale de M munie de coordonnées (x, y) . La classe f peut être représentée par une application—que nous noterons également f —telle que pour presque toute valeur de x (ou y), f soit absolument continue en y (ou x). f peut être définie presque partout comme la dérivée de Lebesgue de

$$\int_{[c, c+\delta] \times [d, d+\delta]} f dx dy,$$

où f est un représentant quelconque de la classe.

Démonstration. Cf. [22, lemme 3.1.1 et théorème 3.1.8].

Remarque. Dans la suite, f désignera toujours ce représentant particulier de l'application.

Nous allons établir divers théorèmes d'existence, dépendant des genres p et p' de M et M' .

7. $p \geq 1, p' \geq 1$

(7.1) Théorème. Si $p \geq 1$ et $p' \geq 1$, toute classe d'homotopie d'applications de M dans M' contient un représentant harmonique réalisant le minimum de l'énergie dans la classe.

(7.2) Remarque. La démonstration qui suit est valable dans le cas des surfaces non orientables. Dans ce cas, on suppose que M et M' ne sont ni une sphère, ni un plan projectif.

Démonstration. Considérons dans la classe d'homotopie donnée une suite minimisante pour l'énergie, et soit (f_r) une sous-suite convergeant faiblement.

Notons U et U' les revêtements universels de M et M' , et Π et Π' les projections. Nous munissons U et U' des métriques Π^*g et Π'^*g' .

U étant simplement connexe, l'application $f_r: M \rightarrow M'$ se relève en une application $\tilde{f}_r: U \rightarrow U'$ lorsqu'on choisit l'image $\tilde{f}_r(P)$ d'un point P de M dans $\Pi'^{-1}(f_r(P))$:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\bar{f}_r} & U' \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi' \\ M & \xrightarrow{f_r} & M' \end{array}$$

Soit $\Pi_1(M)$ le premier groupe d'homotopie de M . Un élément γ de ce groupe peut être identifié à un automorphisme du revêtement. Par construction, \bar{f}_r vérifie les relations

$$\bar{f}_r \circ \gamma = \bar{f}_{r*}(\gamma) \circ \bar{f}_r \quad \forall \gamma \in \Pi_1(M),$$

où $\bar{f}_{r*}: \Pi_1(M) \rightarrow \Pi_1(M')$.

Un autre choix de $\bar{f}_r(P)$ conduit à une application vérifiant les mêmes relations, $\bar{f}_{r*}(\gamma)$ étant remplacé par $\alpha \bar{f}_{r*}(\gamma) \alpha^{-1}$, où α est un élément de $\Pi_1(M')$. D'autre part, les classes d'équivalence $\{\alpha f_* \alpha^{-1} \mid \alpha \in \Pi_1(M')\}$ paramétrisent les classes d'homotopie d'applications de M dans M' [14, p. 106]. Comme les f_r sont homotopes entre eux, les \bar{f}_{r*} associés sont conjugués et en normalisant le choix des $\bar{f}_r(P)$, nous pouvons imposer que $\forall r, \bar{f}_{r*} = \bar{f}_{1*}$. Tous les \bar{f}_r vérifient donc les relations

$$\bar{f}_r \circ \gamma = \bar{f}_{1*}(\gamma) \circ \bar{f}_r \quad \forall \gamma \in \Pi_1(M),$$

et il en découle que l'application $\bar{f} = \lim \bar{f}_r$ vérifie

$$(7.3) \quad \bar{f} \circ \gamma = \bar{f}_{1*}(\gamma) \circ \bar{f} \quad \forall \gamma \in \Pi_1(M).$$

Soit A l'ensemble des applications $\bar{h}: U \rightarrow U'$ de classe L_1^2 sur tout domaine fondamental et satisfaisant (7.3) (où \bar{f} est remplacé par \bar{h}). Pour $\bar{h} \in A$, nous posons $\mathcal{E}(\bar{h}) = E(\bar{h})$, où h est la projection de \bar{h} . Pour poursuivre, nous modifions la construction ci-dessus en prenant directement une suite minimisante (\bar{f}_r) pour \mathcal{E} dans A . En utilisant [22, (9.4.22)] et (6.3), on vérifie qu'après normalisation une sous-suite converge faiblement sur tout domaine fondamental vers une limite \bar{f} minimisant \mathcal{E} dans A .

Soient \bar{P} un point de U et c une constante positive. Par la proposition (6.6), pour presque tout $r \leq c$, \bar{f}_r est absolument continue sur le bord du disque centré en \bar{P} et de rayon r .

Prenons r suffisamment petit pour que $D \cap \gamma D = \emptyset, \forall \gamma \in \Pi_1(M)$. Nous allons voir que \bar{f}_{1D} est un minimum de E parmi les applications \bar{h} sur D vérifiant $\bar{h}_{1\partial D} = \bar{f}_{1\partial D}$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe donc une application $H: D \rightarrow U'$ telle que $H_{1\partial D} = \bar{f}_{1\partial D}$ et $E_D(H) < E_D(\bar{f})$. Pour tout $\gamma \in \Pi_1(M)$, on définit sur γD l'application $\bar{H} = f_{1*}(\gamma) H \gamma^{-1}$. Considérons l'application $\bar{\mathcal{H}}$ égale à \bar{H} dans $\cup_r \gamma D$ et à \bar{f} ailleurs. $\bar{\mathcal{H}}$ est de classe L_1^2 sur un domaine fondamental, elle vérifie les relations (7.3) (où \bar{f} est remplacé par $\bar{\mathcal{H}}$) et $\mathcal{E}(\bar{\mathcal{H}}) < \mathcal{E}(\bar{f})$, ce qui contredit le

fait que \bar{f} minimise \mathcal{E} dans cette classe. \bar{f} minimise donc l'énergie sur D parmi les applications coïncidant avec \bar{f} sur ∂D .

Nous verrons au paragraphe 12 que ce fait implique que \bar{f} est de classe C^∞ .

Comme \bar{f} vérifie les relations (7.3), l'application $f = \lim f_r$ qui est la projection de \bar{f} est dans la classe d'homotopie donnée.

Remarque. Dans: *The existence of minimal immersions of two-spherer*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977) 1033–1036, J. Sacks et K. Uhlenbeck ont annoncé une autre démonstration de ce théorème en supposant que M est une surface compacte et M' une variété compacte à deuxième groupe d'homotopie nul. Remarquons que la démonstration donnée ici s'applique telle quelle à cette situation.

8. $p = 0$

Pour classifier les applications d'une surface dans une sphère, nous utiliserons la notion de degré [20].

(8.1) Définition. Le degré \mathcal{D} d'une application f entre surfaces orientées est défini par

$$\mathcal{D} = \sum_{P \in f^{-1}(Q)} \text{signe dét } |df(P)|,$$

où Q est une valeur régulière quelconque.

On vérifie [20, p. 27] que ce nombre est indépendant du choix de Q .

(8.2) Théorème de Hopf [20, p. 71]. *Si M' est une sphère, le degré paramétrise les classes d'homotopie d'applications de M dans M' .*

(8.3) Remarque. Le degré d'une application peut être positif, négatif ou nul. Si le degré est négatif, un changement du choix de l'orientation sur M' le rendra positif. Dans la suite, nous énoncerons toutes les propositions dans le cas d'un degré positif, l'analogie pour les degrés négatifs en découlant par un changement d'orientation.

(8.4) Théorème. *Soit $p = 0$. Toute classe d'homotopie d'applications de M dans M' contient un représentant harmonique qui réalise le minimum de l'énergie dans la classe. Si $p' \geq 1$, toute application harmonique est constante. Si $p' = 0$, une application harmonique peut s'écrire—moyennant le choix de structures complexes et de variables complexes z et z' sur M et M' —sous la forme:*

$$(8.5) \quad f(z) = \sum_{i=0}^r a_i z^i / \sum_{j=0}^s b_j z^j, \quad a_i, b_j \in \mathbb{C}.$$

Remarques. Comme annoncé en (8.3), les applications de degré négatif correspondent à l'autre orientation sur M' . Dans ce cas, la fonction $f(z)$ ne sera pas rationnelle en z , mais en \bar{z} , et sera anti-méromorphe.

Comme le corollaire (2.9) dont il découle, ce théorème a été obtenu indépendamment dans [28].

Démonstration. Soient $p = 0, p' \geq 1$. Toute application de M dans M' est homotope à une constante, ce qui établit l'existence. D'autre part, toute application harmonique est conforme (théorème (2.8)). Nous ne modifions donc pas le problème en effectuant une transformation conforme de M' , et nous pouvons supposer que M' est plate (si $p' = 1$) ou de courbure sectionnelle négative (si $p' \geq 2$). Un théorème de P. Hartman [13] affirme que dans ce cas, l'énergie n'a qu'une valeur critique par classe d'homotopie, dans ce cas-ci la valeur zéro. Toute application harmonique est donc constante.

Remarque. Le fait que des applications holomorphes homotopes entre elles ont même énergie découle également de [18, § 17].

Soient $p = 0, p' = 0$. Par le corollaire (2.9), une application harmonique est holomorphe ou anti-holomorphe pour les structures complexes associées à g et g' . En prenant éventuellement la structure conjuguée sur M' (ce qui change l'orientation) nous pouvons supposer f holomorphe. Considérant M' comme la sphère de Riemann, f peut être vue comme une fonction méromorphe sur M , et une telle fonction est rationnelle [26]. f peut donc s'écrire sous la forme (8.5). Le degré de f est le maximum de r et s , et tout degré (positif) peut être ainsi réalisé. L'énergie de f est son degré multiplié par le volume de M' .

9. $p \geq 1, p' = 0$: Nonexistence

Dans le cas $p \geq 1, p' = 0$, la situation est tout-à-fait différente, Récemment, J. Eells et J. Wood ont démontré le résultat suivant [11].

(9.1) Théorème. *Il n'y a pas d'application harmonique de degré 1 d'un tore dans une sphère.*

Ce résultat constitue le premier théorème de nonexistence pour des variétés sans bord.

Pour d'autres valeurs de p , la proposition suivante montre que les méthodes usuelles du calcul des variations ne pourront être appliquées telles quelles. Par communication orale, K. Uhlenbeck a annoncé avoir obtenu le même résultat.

(9.2) Proposition. *Si $p \geq 1, p' = 0$, l'énergie n'atteint pas son infimum dans la classe des applications de degré 1.*

Démonstration. Nous montrons d'abord que l'infimum de E dans cette classe est le volume de M' : $V(M')$. Comme toute application f de degré 1 est surjective, la proposition (2.5) implique que $E(f) \geq V(f) \geq V(M')$. Il reste donc à montrer que $\forall \varepsilon > 0$, il existe une application $f_\varepsilon: M \rightarrow M'$ de degré 1 telle que

$$(9.3) \quad E(f_\varepsilon) < V(M') + \varepsilon .$$

Soient D un disque de M , et h une application de D sur M' envoyant ∂D sur un point Q et bijective dans l'intérieur de D . Par le théorème 1.2 de [21], pour tout $\varepsilon > 0$, la surface $h(D)$ peut être représentée par une application f'_ε d'un

disque dans M' , vérifiant sur ce disque la condition $E(f') < V(M') + \varepsilon$. Par une transformation conforme, nous pouvons supposer que ce disque est D . L'application définie par

$$f_* = \begin{cases} f'_* & \text{dans } D, \\ Q & \text{dans } M \setminus D \end{cases}$$

est de degré 1 et vérifie la condition (9.3).

Supposons maintenant qu'une application f de degré 1 réalise le minimum de l'énergie. f vérifie donc $E(f) = V(f)$. Par la proposition (2.5), f est conforme, et donc holomorphe. Une telle application devrait être un difféomorphisme de M sur M' , ce qui est impossible.

Remarque. Pour des degrés > 1 , la même démonstration établit qu'un minimum de l'énergie ne peut être réalisé que par une application holomorphe. Nous allons voir que pour certains degrés, de telles applications existent.

10. $p \geq 1, p' = 0$: Applications holomorphes

(10.1) Proposition. Soient $p \geq 1$ et $p' = 0$.

(i) $\forall \mathcal{D} \geq p + 1$, il existe une application holomorphe de M dans M' de degré \mathcal{D} .

(ii) Si $p \geq 2$, il en est de même pour au moins une valeur \mathcal{D} telle que $2 \leq \mathcal{D} \leq p$.

(iii) Toujours pour $p \geq 2$, et quelles que soient la ou les valeurs obtenues en (ii), il existe au moins une application holomorphe de M dans M' dont le degré vérifie $2 \leq \mathcal{D} \leq \frac{1}{2}(p + 3)$.

Toutes ces applications sont bien entendu harmoniques.

En tant que théorèmes d'existence pour les applications harmoniques, les résultats (i) et (ii) sont présentés dans [27].

(i) découle du théorème de Riemann-Roch appliqué aux fonctions méromorphes sur M [26].

(ii) découle de l'existence des points de Weierstrass sur M , lorsque $p \geq 2$ [26].

(iii) est le théorème de Brill-Noether ([4] et [19]).

11. $p \geq 2, p' = 0$: surfaces symétriques

Dans le cas $p \geq 1, p' = 0$, nous obtenons donc des résultats d'existence lorsque le degré est "grand". Lorsqu'il est égal à 1, l'énergie n'atteint pas son infimum (9.2), et pour $p = 1$, il n'y a pas d'application harmonique (9.1).

En contraste avec ces résultats, nous établissons un théorème d'existence partiel pour $p \geq 2$.

(11.1) Théorème. Soit M' une sphère munie de sa métrique canonique.

(i) Si M est une surface de genre $p \geq 2$ représentée par une sphère à

ances symétrique par rapport à l'équateur et à p méridiens formant des angles égaux entre eux, il existe pour tout $\mathcal{D} \leq \frac{1}{2}p$ une application harmonique de M dans M' de degré \mathcal{D} .

(ii) Si M est de genre pair et symétrique par rapport à trois lignes orthogonales, il existe une application harmonique de degré 1 de M dans M' .

Démonstration. Le principe de la démonstration est le suivant: on construit une suite minimisante convergeant faiblement dans la classe des applications commutant avec les symétries, on montre qu'on peut remplacer les éléments de la suite par des applications préservant les régions comprises entre trois plans, et que la limite est un point critique de l'énergie. On établit enfin que la limite est de classe C^∞ , et il en découle que son degré est \mathcal{D} .

(a) Sur M , notons S_0 la symétrie par rapport à l'équateur (appelé 0), et S_1, S_2, \dots, S_p (cas i) ou S_1, S_2 (cas ii) les symétries par rapport aux méridiens (appelés 1, 2, ...). La sphère M' est évidemment symétrique par rapport à tous ses grands cercles: nous choisissons sur M' un équateur et une famille de méridiens en nombre égal à ceux de M , et nous appelons S'_0 la symétrie par rapport à cet équateur $0'$ et S'_s la symétrie par rapport au $(s \cdot \mathcal{D})^{\text{ème}}$ méridien, compté en partant d'un méridien donné, et appelé s' . (Dans le cas (ii), nous avons $\mathcal{D} = 1$). Nous dirons qu'une application f respecte les symétries si pour tout s , elle vérifie les relations: $f \circ S_s = S'_s \circ f$. Géométriquement, ces applications enroulent M \mathcal{D} fois autour des pôles de M' .

Nous construisons une suite minimisante dans la classe des applications respectant les symétries. Une sous-suite (f_r) converge faiblement dans L^2_1 .

(b) Nous construisons une suite (f'_r) d'applications dans la même classe, telles que $E(f'_r) \leq E(f_r)$ et telles qu'un quartier compris entre les plans 0, s et $s + 1$ de M soit envoyé dans le quartier correspondant de M' compris entre les plans $0'$, s' et $(s + 1)'$. Comme $E(f'_r) \leq E(f_r)$, la suite (f'_r) est également une suite minimisante dans la classe des applications respectant les symétries.

Prenons le cas (ii). Considérons dans la figure 1 l'image de la région I par f_r . La partie du bord de I située sur la ligne s est envoyée dans la ligne s' de M' , mais l'image de I peut sortir de la région I' . En effectuant successivement les symétries S'_0, S'_1 et S'_2 sur les parties de l'image de I non comprises dans I' , nous les ramenons les unes après les autres dans I' . L'image de la ligne s est toujours comprise dans la ligne s' . En effectuant cette construction sur chaque quartier de M , nous obtenons donc des applications qui se "collent" ensemble pour donner une application $f'_r \in L^2_1$. On a $E(f'_r) = E(f_r)$.
degré 1.

Dans le cas (i), nous effectuons une construction analogue. Mais nous avons à veiller à ce que l'application f'_r sur un quartier envoie la ligne s dans la ligne s' . Pour cela, nous n'effectuons pas uniquement des symétries, mais nous projetons des quartiers sur un de leurs bords le long des cercles centrés en le pôle. La figure 2 illustre ce procédé dans le cas $p = 5, \mathcal{D} = 2$: II' et III' sont

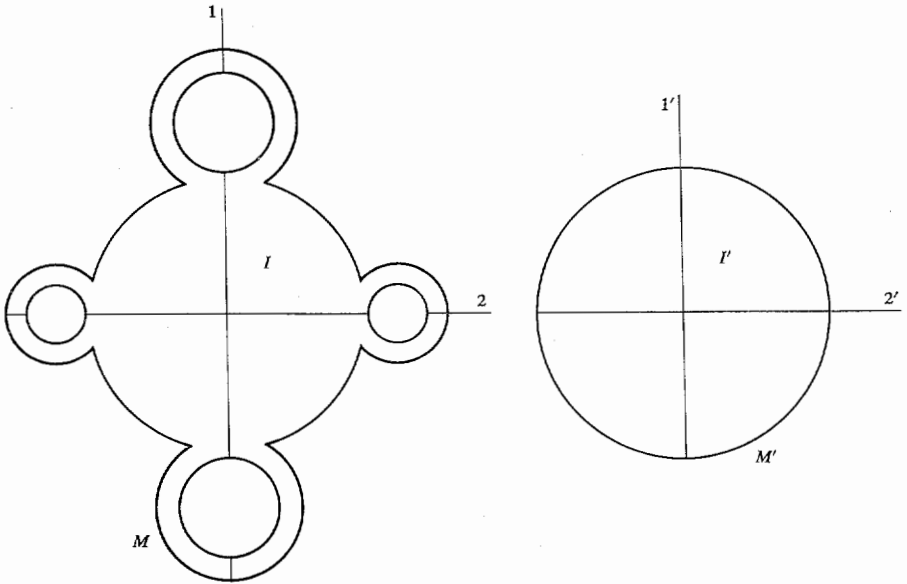


Fig. 1

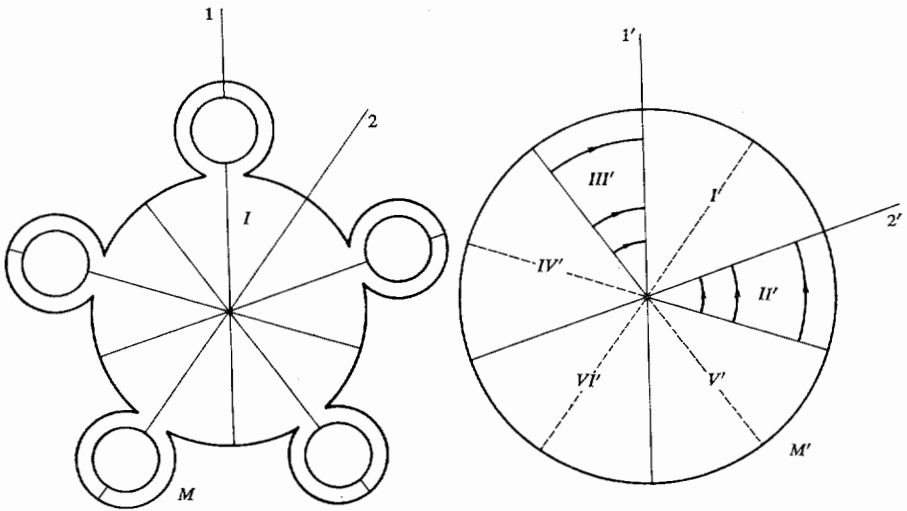


Fig. 2

projetés sur les lignes $1'$ et $2'$. IV' , V' et VI' sont "pliés" les uns sur les autres au-dessus de I' . De cette manière, 1 (2) est envoyé sur $1'$ ($2'$).

Remarquons que pour $\mathcal{D} > \frac{1}{2}p$, nous ne pouvons pas appliquer cette méthode, ce qui impose la limitation de l'énoncé (i). L'application f'_r définie

par cette construction respecte les symétries et vérifie $E(f'_r) \leq E(f_r)$.

(c) Soit f la limite faible de la suite (f'_r) . Nous savons que f minimise l'énergie parmi les applications respectant les symétries, mais pas dans la classe des applications de degré \mathcal{D} (proposition (9.2)). Il nous faut donc établir que f est point critique de l'énergie dans cette classe.

Pour cela, considérons sur M et M' des atlas de type particulier: les cartes locales sont des disques liés à M et M' par l'application exponentielle et sont de trois sortes: soit ils ne rencontrent aucune des lignes de symétrie, soit ils n'en rencontrent qu'une et leur centre est sur la ligne, soit ils en rencontrent plusieurs et leur centre est à l'intersection. Nous appelons voisinage de type t un tel disque rencontrant t lignes ($t = 0, 1, \dots$).

Comme dans la démonstration de (7.1), nous voyons qu'autour de tout point de M il existe un disque de l'atlas dans lequel f minimise l'énergie parmi les applications respectant les t symétries. Nous verrons dans le prochain paragraphe que f est alors de classe C^0_λ .

(d) Dans une carte de type zéro sur M , les symétries n'introduisent aucune condition sur f , et f minimise E .

Considérons une carte de type 1 sur M . Soit X un champ de vecteurs le long de f dans cette carte, nul le long du bord. Nous voulons montrer que $D_X E(f) = 0$. Notons S la symétrie dans la carte et S' la symétrie associée sur M' . S' induit une symétrie \mathcal{S} sur l'espace des champs de vecteurs le long de f , et X peut s'écrire sous la forme

$$X = X_1 + X_2 = \frac{1}{2}(X + \mathcal{S}X) + \frac{1}{2}(X - \mathcal{S}X).$$

X_1 et X_2 vérifient $\mathcal{S}X_1 = X_1$ et $\mathcal{S}X_2 = -X_2$.

Comme X_1 est symétrique, $D_{X_1} E(f) = 0$ puisque f minimise E dans la classe des applications respectant les symétries. Comme f respecte les symétries,

$$D_{X_2} E(f) = D_{\mathcal{S}X_2} E(f) = -D_{X_2} E(f).$$

Cette quantité est donc également nulle.

Dans une carte de type ≥ 2 , la relation $D_X E(f) = 0$ s'obtient en séparant X en ses composantes symétriques et antisymétriques par rapport aux différentes lignes de symétrie.

(e) f respecte les quartiers de M et M' comme tous les éléments de la suite f'_r . Comme f est C^∞ par (12.3), elle est de degré \mathcal{D} .

Remarques. Dans l'espace $C^\infty(M, M')$, cette construction s'interprète comme suit: la solution est un minimum de l'énergie dans un sous-espace de C^∞ , mais non dans l'espace entier. Le graphe de l'énergie sur $C^\infty(M, M')$ apparaît comme "symétrique" par rapport au sous-espace, ce qui fait que la solution est point critique dans l'espace entier.

Il semble que l'on ne possède pas suffisamment d'information sur f pour déterminer son index de Morse. Considérons par exemple une variation de f

obtenue en composant f avec une transformation conforme infinitésimale de M' , perpendiculaire à l'équateur $0'$. Nous munissons M' de coordonnées isothermes $(u, v) \in R \times [0, 2\pi)$, telles que la courbe $0'$ soit d'équation $u = 0$. La métrique canonique de M' s'écrit alors

$$g'_{11} = g'_{22} = \left(\frac{2e^u}{1 + e^{2u}} \right)^2, \quad g'_{12} = 0,$$

et le champ de vecteurs $\partial/\partial u$ est une transformation conforme infinitésimale.

En utilisant la forme de la dérivée seconde de E établie dans [9], on obtient pour cette variation

$$(11.2) \quad D_{\frac{\partial}{\partial u}}^2 E(f) = \int_M 4g^{ij} \frac{e^{2u}}{(1 + e^{2u})^2} \left[\left(1 - \frac{4e^{2u}}{(1 + e^{2u})^2} \right) f_i^1 f_j^1 + \left(1 - \frac{8e^{2u}}{(1 + e^{2u})^2} \right) f_i^2 f_j^2 \right] v_g.$$

La fonction $e^{2u}/(1 + e^{2u})^2$ prend son maximum en 0, où elle vaut $\frac{1}{4}$ et est supérieure à $\frac{1}{8}$ entre $-\frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2})$ et $\frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2})$. Les termes en $f_i^1 f_j^1$ dans (11.2) n'introduisent donc qu'une contribution positive, mais il n'en est pas de même pour les termes en $f_i^2 f_j^2$. A défaut de données plus précises sur f , il ne semble pas possible de déterminer le signe de (11.2).

12. Différentiabilité

En suivant une méthode de C. Morrey [21], nous démontrons les propriétés de différentiabilité des points critiques de l'énergie utilisées dans les théorèmes (7.1) et (11.1).

(12.1) Définition. Continuité Höldérienne d'exposant λ . Notons $|\cdot|$ les distances riemanniennes sur M et M' . Si D est un disque de M , une application $f: D \rightarrow M'$ appartient à $C_\lambda^0(D, M')$, $\lambda \in (0, 1)$ ssi $\forall m_1, m_2 \in D$,

$$|f(m_1) - f(m_2)| \leq C |m_1 - m_2|^\lambda.$$

(12.2) Proposition. Soient M et M' des surfaces symétriques dans le sens du théorème (11.1), \mathcal{A} un atlas sur M adapté aux symétries et composé de disques suffisamment petits, D un disque de type t de \mathcal{A} et $f \in L_1^2(D, M')$ une application respectant les symétries associées à D . Si pour tout $h \in L_1^2(D, M')$ respectant ces mêmes symétries et tel que $h|_{\partial D} = f|_{\partial D}$, on a $E(f) \leq E(h)$, alors f est de classe C_λ^0 dans l'intérieur de D .

(12.3) Proposition. Si $f \in C_\lambda^0(D, M')$ est point critique de l'énergie, f est de classe C^∞ dans D .

La proposition (12.2) est due à C. Morrey dans le cas $t = 0$, [21], [22], et c'est une variante simple de sa démonstration que nous utilisons. Pour plus de clarté, nous la présentons ici en entier.

La proposition (12.3) découle immédiatement de [22, théorème 1.10.4].

Démonstration de (12.2). Nous considérons sur M un atlas du type envisagé au paragraphe 11. Les cartes sont des disques de rayon $\leq R$, associés à l'application exponentielle autour de leur centre. Nous notons D un tel disque et $B = \exp^{-1}(D)$ son image dans le plan tangent. Pour une application $h: D \rightarrow M'$, nous notons $\tilde{h}: B \rightarrow M'$ l'application induite $h \circ \exp$. \tilde{h} est fonction des variables euclidiennes (x, y) sur B . Si (r, θ) sont des coordonnées polaires sur ce disque, nous posons $\tilde{H}(r, \theta) = \tilde{h}(x, y)$. Nous notons $E_B(\tilde{h})$ l'énergie de \tilde{h} dans B .

Comme M est compacte, nous pouvons supposer R suffisamment petit pour qu'il existe un nombre positif w tel que pour tout champ de vecteurs X , champ de 1-formes ξ et fonction h sur D , on ait, en posant $W = 1/w$:

$$(12.4) \quad \begin{aligned} w \sum (X^i)^2 &\leq g_{ij} X^i X^j \leq W \sum (X^i)^2, \\ w \sum (\xi_i)^2 &\leq g^{ij} \xi_i \xi_j \leq W \sum (\xi_i)^2, \\ w \int_B \tilde{h} dx dy &\leq \int_D h v_g \leq W \int_B \tilde{h} dx dy, \\ w \int_{\partial B} \tilde{H} d\theta &\leq \int_{\partial D} H ds_g \leq W \int_{\partial B} \tilde{H} d\theta. \end{aligned}$$

Sur M' , nous considérons des cartes de rayon R' , choisies de telle sorte que les deux premières relations de (12.4) soient vérifiées par les champs de vecteurs et de 1-formes sur M' , les constantes étant appelées w' et W' .

Un disque de \mathbb{R}^2 de centre m_0 et de rayon a sera noté $B(m_0, a)$.

(12.5) Lemme. Soient $\tilde{F} \in L^2_1(\partial B(m_0, R), \mathbb{R}^2)$ une application vérifiant certaines conditions de symétrie par rapport à des rayons, et \tilde{h} la fonction harmonique sur $B(m_0, R)$ égale à \tilde{F} sur ∂B . \tilde{h} vérifie les mêmes conditions de symétrie, et

$$E_B(\tilde{h}) \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta(\theta)|^2 d\theta.$$

Démonstration. Si nous développons $\tilde{F}(\theta)$ en série de Fourier

$$\tilde{F}^\alpha(\theta) = \frac{a_0^\alpha}{2} + \sum_{\sigma=1}^\infty (a_\sigma^\alpha \cos \sigma\theta + b_\sigma^\alpha \sin \sigma\theta),$$

la fonction harmonique \tilde{H} s'écrit

$$\tilde{H}^\alpha(r, \theta) = \frac{a_0^\alpha}{2} + \sum_{\sigma=1}^\infty \frac{r^\sigma}{R^\sigma} (a_\sigma^\alpha \cos \sigma\theta + b_\sigma^\alpha \sin \sigma\theta).$$

Le lemme découle alors du calcul suivant:

$$2E_B(\tilde{H}) = \sum_\alpha \int_B \left(\left(\frac{\partial \tilde{H}^\alpha}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \tilde{H}^\alpha}{\partial \theta} \right)^2 \right) r dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sigma \pi ((a_{\sigma}^{\alpha})^2 + (b_{\sigma}^{\alpha})^2) \\
&\leq \sum_{\alpha} \sum_{\sigma} \sigma^2 \pi ((a_{\sigma}^{\alpha})^2 + (b_{\sigma}^{\alpha})^2) = \sum_{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \tilde{F}^{\alpha}}{\partial \theta} \right)^2 d\theta .
\end{aligned}$$

(12.6) Lemme. Soient B l'image dans \mathbb{R}^2 d'une carte de type t et $\tilde{F}: \partial B \rightarrow M'$ une application absolument continue respectant les t symétries associées à D et vérifiant

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{F}_{\theta}(\theta)|^2 d\theta \leq \frac{w'R'^2}{4\pi} .$$

Il existe une application $\tilde{h} \in L^2_1(B, M')$ coïncidant avec \tilde{F} sur ∂B , respectant les t symétries et telle que

$$E_B(\tilde{h}) \leq \frac{W'}{2} \int_{\partial B} |\tilde{F}_{\theta}(\theta)|^2 d\theta .$$

Démonstration. Fixons un angle θ_0 . Il existe une valeur θ_1 telle que $|\theta_1 - \theta_0| \leq \pi$, et $|\tilde{F}(\theta) - \tilde{F}(\theta_0)| \leq |\tilde{F}(\theta_1) - \tilde{F}(\theta_0)| \forall \theta$. Nous avons

$$\begin{aligned}
|\tilde{F}(\theta_1) - \tilde{F}(\theta_0)|^2 &\leq \left(\int_0^{\pi} |\tilde{F}_{\theta}| d\theta \right)^2 \quad (\text{prop. (6.5)}) \\
&\leq \pi \int_0^{\pi} |\tilde{F}_{\theta}|^2 d\theta ,
\end{aligned}$$

Donc

$$|\tilde{F}(\theta) - \tilde{F}(\theta_0)|^2 \leq \frac{1}{4} w'R'^2 .$$

Considérons une carte exponentielle sur M' de rayon $\frac{1}{2}R'$ centrée en $\tilde{F}(\theta_0)$. Pour tout chemin $u^{\alpha}(s)$ (où s est la longueur d'arc euclidienne), on a

$$\int_0^{\lambda} \sqrt{g'_{\alpha\beta}(u) u'_s u'_s} ds \geq \sqrt{w'} \int_0^{\lambda} \left(\sum_{\alpha} (u'_s)^2 \right)^{1/2} ds \geq \lambda \sqrt{w'} ,$$

et tout point à distance $\frac{1}{2}R'$. $\sqrt{w'}$ de $\tilde{F}(\theta_0)$ est contenu dans la carte. L'ensemble $\{\tilde{F}(\theta) | \theta \in [0, 2\pi]\}$ est donc contenu dans une carte associée à B et de rayon R' .

Définissons $\tilde{h}: B \rightarrow M'$ comme l'application de B dans cette carte, coïncidant avec \tilde{F} sur le bord et dont les composantes sont harmoniques. \tilde{h} respecte les t symétries et par le lemme (12.5), nous avons

$$\begin{aligned}
E_B(\tilde{h}) &= \frac{1}{2} \int_B \sum_t g'_{\alpha\beta} \tilde{h}_i^{\alpha} \tilde{h}_i^{\beta} dx dy \\
&\leq \frac{1}{2} W' \int_B \sum_{i,\alpha} |\tilde{h}_i^{\alpha}|^2 dx dy \leq \frac{1}{2} W' \int_0^{2\pi} |\tilde{H}_{\theta}|^2 d\theta .
\end{aligned}$$

(12.7) Lemme. Soit $\tilde{f} \in L^2_1(B(m_0, a), M')$ vérifiant

$$(12.8) \quad 2E_{B(m_0, r)}(\tilde{f}) \leq k^2(r),$$

où

$$(12.9) \quad \int_0^r \rho^{-1}k(\rho)d\rho = K(r) < \infty \quad \forall 0 \leq r \leq a.$$

Alors $\tilde{f}(m_0)$ est défini et \tilde{F} est absolument continue en r pour presque tout θ . Si $l(x, y) = \sqrt{2e(\tilde{f})}$, on a presque partout

$$(12.10) \quad |\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(x_0, y_0)| \leq r \int_0^1 l((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty)dt.$$

Démonstration. Désignons par $L(r, \theta)$ la fonction l en coordonnées polaires. Si $||$ désigne la longueur d'un vecteur sur M' ,

$$L^2(r, \theta) = |\tilde{F}_r|^2 + r^{-2}|\tilde{F}_\theta|^2.$$

Posons

$$\Psi(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^{1/2}L(\rho, \theta) d\rho d\theta.$$

Par l'inégalité d'Hölder,

$$\Psi(r) \leq \sqrt{2\pi r} \left(\int_B l^2 dx dy \right)^{1/2},$$

et par (12.8),

$$\Psi(r) \leq (2\pi r)^{1/2}k(r).$$

D'autre part, $\Psi'(r) = \int_0^{2\pi} \rho^{1/2}L(\rho, \theta)d\theta$, d'où

$$\begin{aligned} \int_0^r \int_0^{2\pi} L(\rho, \theta)d\rho d\theta &= \int_0^r \rho^{-1/2}\Psi'(\rho)d\rho \\ &= r^{-1/2}\Psi(r) + \frac{1}{2} \int_0^r \rho^{-3/2}\Psi(\rho)d\rho \\ &\leq \sqrt{2\pi}k(r) + \frac{1}{2} \int_0^r \rho^{-3/2}\sqrt{2\pi}\rho^{1/2}k(\rho)d\rho \\ &\leq \sqrt{2\pi}(k(r) + K(r)) \quad (\text{par (12.9)}), \end{aligned}$$

et cette quantité tend vers 0 quand $r \rightarrow 0$. L'absolue continuité en découle et par (6.5), pour $0 < r_1 < r_2$,

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{F}(r_2, \theta) - \tilde{F}(r_1, \theta)| d\theta \leq \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (|\tilde{F}_r|^2 + r^{-2}|\tilde{F}_\theta|^2)^{1/2} dr d\theta .$$

On a

$$\lim_{\substack{r_2 \rightarrow 0 \\ 0 < r_1 < r_2}} \int_0^{2\pi} |\tilde{F}(r_2, \theta) - \tilde{F}(r_1, \theta)| d\theta = 0 ,$$

et il existe donc une fonction $\tilde{F}(0, \theta)$ telle que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int |\tilde{F}(r, \theta) - \tilde{F}(0, \theta)| d\theta = 0 .$$

De (12.9) découle que $\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta| d\theta = 0$, et $\tilde{F}(0, \theta)$ est donc presque partout indépendante de θ . $\tilde{f}(x_0, y_0)$ est donc défini.

L'inégalité (12.10) découle alors du calcul suivant:

$$|\tilde{F}(r, \theta) - \tilde{F}(0, \theta)| \leq \int_0^r |\tilde{F}_r| d\rho \leq \int_0^r L(\rho, \theta) d\rho = r \int_0^1 L(t.r, \theta) dt .$$

(12.11) Lemme de croissance de Dirichlet. Soit $\tilde{f} \in L^2_1(B(m_0, R), M')$ telle que $\forall m \in B(m_0, R)$ et pour $0 \leq r \leq \delta = R - |m - m_0|$,

$$(12.12) \quad \int_{B(m, r)} (|\tilde{F}_r|^2 + \rho^{-2}|\tilde{F}_\theta|^2) \rho d\rho d\theta \leq N^2 \left(\frac{r}{\delta} \right)^{2\lambda} ,$$

où $\lambda < 1$. Alors $\tilde{f} \in C^0_\lambda(B(m_0, \rho)) \forall \rho < R$ et

$$|\tilde{f}(\xi) - \tilde{f}(m)| \leq C \cdot N (|\xi - m|/\delta)^\lambda$$

pour $|\xi - m| \leq \frac{1}{2}\delta$.

Démonstration. Soient m et $\xi \in B(m_0, R)$, avec $|m - m_0| \leq R - \delta$ et $|m - \xi| \leq \frac{1}{2}\delta$. Soient $\bar{m} = \frac{1}{2}(m + \xi)$ et $\chi = \frac{1}{2}|m - \xi|$. Considérons enfin un point $\eta \in B(\bar{m}, \chi)$.

Par le lemme (12.7) (qui s'applique car $\lambda < 1$), nous avons

$$|\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(\xi)| \leq 2\chi \int_0^1 L(\xi + t(\eta - \xi)) dt .$$

Prenons la moyenne sur $B(\bar{m}, \chi)$ et effectuons le changement de variable $\kappa = \xi + t(\eta - \xi)$. Notons $V(B)$ le volume de B et posons $\bar{m}_t = (1-t)\xi + t\bar{m}$. Il vient

$$\begin{aligned} & V(B(\bar{m}, \chi))^{-1} \int_{B(\bar{m}, \chi)} |\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(\xi)| d\eta \\ & \leq 2\chi V(B(\bar{m}, \chi))^{-1} \int_{B(\bar{m}, \chi)} d\eta \int_0^1 L(\xi + t(\eta - \xi)) dt \end{aligned}$$

$$\leq 2\chi V(B(\bar{m}, \chi))^{-1} \int_0^1 dt \int_{B(\bar{m}_t, t\chi)} L(\kappa) d\kappa .$$

Par l'inégalité de Hölder et (12.12),

$$\begin{aligned} \int_{B(\bar{m}_t, t\chi)} L(\kappa) d\kappa &\leq \left(\int_{B(\bar{m}_t, t\chi)} L^2(\kappa) d\kappa \right)^{1/2} \cdot (V(B(\bar{m}_t, t\chi)))^{1/2} \\ &\leq N(t\chi)^{\lambda(\frac{1}{2}\delta)^{-\lambda}} C' t\chi \leq C' N(t\chi)^{1+\lambda(\frac{1}{2}\delta)^{-\lambda}} . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &V(B(\bar{m}, \chi))^{-1} \int_{B(\bar{m}, \chi)} |\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(\xi)| d\eta \\ &\leq C' \cdot 2\chi\chi^{-2} N\chi^{1+\lambda(\frac{1}{2}\delta)^{-\lambda}} \int_0^1 t^{1+\lambda} dt \leq C'' N(\chi/\delta)^\lambda . \end{aligned}$$

La même inégalité s'obtient pour la moyenne de $|\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(m)|$. En prenant la moyenne sur η des deux membres de

$$|\tilde{f}(m) - \tilde{f}(\xi)| \leq |\tilde{f}(m) - \tilde{f}(\eta)| + |\tilde{f}(\eta) - \tilde{f}(\xi)| ,$$

nous obtenons le résultat cherché puisque le membre de gauche ne dépend pas de η .

Démonstration de la proposition (12.2). Soient D un voisinage de type t et $f \in L_1^2(D, M')$ une application minimisant l'énergie parmi les applications sur D respectant les t symétries.

Premier cas. supposons que

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta \leq \frac{W'R'^2}{4\pi} .$$

Par le lemme (12.6), il existe une application $\tilde{h}: B \rightarrow M'$ respectant les symétries et telle que

$$E_B(\tilde{h}) \leq \frac{W'}{2} \int_{\partial B} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta .$$

Par (12.4), h vérifie

$$E_D(h) \leq \frac{W^2 W'}{2} \int_{\partial B} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta .$$

Comme f minimise l'énergie dans D parmi les applications respectant les symétries,

$$E_D(f) \leq E_D(h) \leq \frac{W^2 W'}{2} \int_{\partial B} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta .$$

Par (12.4),

$$E_B(\tilde{f}) \leq \frac{W^4 W'}{2} \int_{\partial B} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta .$$

Deuxième cas. supposons que

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta > \frac{w' R'^2}{4\pi} .$$

Il vient

$$\begin{aligned} E_B(\tilde{f}) &\leq W^2 E_D(f) \leq W^2 \inf E \\ &\leq W^2 \inf E \cdot \frac{4\pi}{w' R'^2} \int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta . \end{aligned}$$

Donc, si $\frac{1}{2\lambda} > \max\left(\frac{W^4 W'}{2}, \frac{4\pi W^2}{W' R'^2} \inf E\right)$, on a dans tous les cas

$$E_B(\tilde{f}) \leq \frac{1}{2\lambda} \int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta ,$$

c'est-à-dire,

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \left(|\tilde{F}_r|^2 + \frac{1}{\rho^2} |\tilde{F}_\theta|^2 \right) \rho d\rho d\theta \leq \frac{1}{2\lambda} \int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta .$$

Posons

$$\phi(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \left(|\tilde{F}_r|^2 + \frac{1}{\rho^2} |\tilde{F}_\theta|^2 \right) \rho d\rho d\theta .$$

Il vient

$$r\phi'(r) = \int_0^{2\pi} \left(|\tilde{F}_r|^2 + \frac{1}{r^2} |\tilde{F}_\theta|^2 \right) r^2 d\theta \geq \int_0^{2\pi} |\tilde{F}_\theta|^2 d\theta .$$

Donc $\phi(r) \leq (1/2\lambda)r\phi'(r)$, et pour un δ fixé $\phi(\delta) \leq 2W^2 E(f)$. En intégrant cette inégalité de r à δ , il vient $\phi(r) \leq 2W^2 E(f)(r/\delta)^{2\lambda}$ lorsque le point considéré est centre d'un voisinage de type t et de rayon δ . Sinon, on vérifie par une étude cas par cas qu'on peut inclure les disques dans des voisinages de type t et de rayon suffisant pour obtenir la même inégalité, la constante étant tout au plus multipliée par un nombre fixé. (Je remercie S. Hildebrandt pour cette suggestion.)

Le lemme (12.11) achève la démonstration.

13. Applications pouvant être rendues harmoniques

Un résultat de J. Eells et J. Wood [11] montre qu'un changement de métrique sur M ou M' peut modifier la question de l'existence des applications harmoniques. Nous posons la question suivante. Soient M et M' des variétés différentiables compactes. Nous dirons qu'une application $f: M \rightarrow M'$ peut être rendue harmonique s'il existe sur M et M' des métriques par rapport auxquelles f est harmonique.

(13.1) Question. Toute classe d'homotopie d'applications de M dans M' contient-elle un élément pouvant être rendu harmonique?

La réponse à cette question est en général négative—pour des variétés sans bord ou à bord (problème de Dirichlet). En effet, les démonstrations des théorèmes (3.2) et (9.1) sont valables quelles que soient les métriques sur M et M' .

Dans le cas des surfaces orientables sans bord, le théorème suivant donne une réponse complète.

(13.2) Théorème. (i) *La classe d'homotopie des applications de degré 1 du tore dans la sphère ne contient aucun élément pouvant être rendu harmonique.*

(ii) *A l'exception du cas (i), toute classe d'homotopie d'applications entre surfaces orientables sans bord contient un élément pouvant être rendu harmonique.*

Démonstration. (i) découle du fait que la démonstration du théorème (9.1) ne fait pas intervenir les métriques sur M et M' .

(ii) découle du théorème (7.1) dans le cas $p' \neq 0$, du théorème (8.4) dans le cas $p = 0$ et du théorème (11.1) lorsque $p \geq 2$, $p' = 0$ et $\mathcal{D} = 1$.

Pour démontrer (ii) dans le cas $p \geq 1$, $p' = 0$ et $\mathcal{D} \geq 2$, on observe que l'on peut construire une surface de genre p , revêtement à \mathcal{D} feuillet de la sphère. Ce résultat classique peut se démontrer comme suit (démonstration communiquée par H. Rauch): on considère sur la sphère $2(p + \mathcal{D} - 1)$ points, reliés deux à deux par $p + \mathcal{D} - 1$ lignes. Etant données \mathcal{D} copies de S^2 , on projette $p + 1$ de ces lignes sur deux des copies, que l'on fend le long des lignes. On soude alors les deux copies l'une à l'autre en croisant les bords des $p + 1$ fentes. Ceci produit une surface hyperelliptique de genre p . On projette alors les $\mathcal{D} - 2$ lignes restantes sur un des feuillet de cette surface, et chacune de ces lignes sur une des $\mathcal{D} - 2$ copies restantes de S^2 , ce qui permet de souder $\mathcal{D} - 2$ feuillet supplémentaires à la surface. La surface obtenue est de genre p car son indice de ramification est $2(p + \mathcal{D} - 1)$, [26, p. 275].

Bibliographie

- [1] N. Aronszajn, *A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order*, J. Math. Pures Appl. (9) **36** (1957) 235–249.
- [2] M. Berger, *Lectures on geodesics in Riemannian geometry*, Lecture Notes in Math. No. 33, Tata Institute, Bombay, 1965.

- [3] L. Bieberbach, *Conformal mappings*, Chelsea, New York, 1964.
- [4] A. Brill & M. Noether, *Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie*, Math. Ann. **7** (1874) 269–310.
- [5] S. S. Chern & S. I. Goldberg, *On the volume-decreasing property of a class of real harmonic maps*, Amer. J. Math. **97** (1975) 133–147.
- [6] R. Courant, *Dirichlet's principle, conformal mappings and minimal surfaces*, Interscience, New York, 1950.
- [7] R. Courant & D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Vol. 1, Interscience, New York, 1953.
- [8] J. Dieudonne, *Eléments d'analyse*, Vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [9] C. Earle & J. Eells, *Deformations of Riemann surfaces*, Lecture Notes in Math. Vol. 103, Springer, Berlin, 1969, 122–149.
- [10] J. Eells & J. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964) 109–160.
- [11] J. Eells & J. Wood, *Restrictions on harmonic maps of surfaces*, Topology **15** (1976) 263–266.
- [12] R. Hamilton, *Harmonic maps of manifolds with boundary*, Lecture Notes in Math. Vol. 471, Springer, Berlin, 1975.
- [13] P. Hartman, *On homotopic harmonic maps*, Canad. J. Math. **19** (1967) 673–687.
- [14] S. T. Hu, *Homotopy theory*, Academic Press, New York, 1959.
- [15] L. Lemaire, *Applications harmoniques de variétés à bord*, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, **279** (1974) 925–927.
- [16] —, *Applications harmoniques de surfaces*, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, **280** (1975) 897–899.
- [17] —, *Applications harmoniques de surfaces*, Thèse, Bruxelles, 1975.
- [18] A. Lichnerowicz, *Applications harmoniques et variétés Kähleriennes*, Sympos. Math. Vol. 3, Bologna, 1970, 341–402.
- [19] T. Meis, *Die minimale Blätterzahl der Konkretisierung einer kompakten Riemannschen Fläche*, Schriften. Math. Inst. Univ. Münster, 1960.
- [20] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [21] C. B. Morrey, Jr., *The problem of Plateau on a Riemannian manifold*, Ann. of Math. **49** (1948) 807–851.
- [22] —, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer, New York, 1966.
- [23] J. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **63** (1956) 20–63.
- [24] J. Sampson, *Some properties and applications of harmonic maps*, à paraître dans Am. Sci. École Norm, Sup.
- [25] R. T. Smith, *Harmonic mappings of surfaces*, Thesis, Warwick, 1972.
- [26] G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley, Reading, 1957.
- [27] J. C. Wood, *Harmonic mappings between surfaces*, Thesis, Warwick, 1974.
- [28] —, *Singularities of harmonic maps and applications of the Gauss-Bonnet formula*, Amer. J. Math. **99** (1977) 1329–1344.

UNIVERSITY OF WARWICK